构造实数域上小波函数的一般方法

李宁[1]，李乐之[2]

[1] 南京工程学院，南京

[2] ML Collective San Francisco

摘要： 本文提出了基于有限长度的数列来构造实数域上小波函数的一般方法，这个有限长度数列被称为种子数列，相应的小波函数称为种子数列小波函数。种子数列小波函数有解析表达式且是连续和可微的，并且在时频域中都是能量集中的。亦即它在时频域中均有有限支撑集。本文证明了当且仅当种子数列具有零均值时，其插值函数满足小波函数的可允许条件。同时还给出了种子数列小波函数的高阶消失矩所对应的条件。在此基础上本文还提出了随机种子数列小波函数的概念，构造出了具有任意阶消失矩的随机小波函数

关键词： 小波变换；小波框架；小波函数；模态分解；时频域分析

中图分类号： TP14

A general method for constructing wavelet functions on real number field

Ning Li[1], Lezhi Li[2]

[1]Nanjing Institute of Technology Nanjing

[2]ML Collective San Francisco

Abstract: In this article, the general method is proposed to construct wavelet function on real number field based on finite length sequence.This finite length sequence is called the seed sequence.The interpolation function generated by the seed sequence is continuous and energy concentrated in both time and frequency domains。That is, it has a finite support set in both time and frequency domains.It is proved that if and only if the seed series has 0 mean value, its interpolation function satisfies the admissible condition of wavelet function.The conditions corresponding to the higher order vanishing moment of the wavelet function are also given.The concept of random wavelet function is proposed, and a random wavelet function with vanishing moments of any order is constructed.

Key words: wavelet transform;mode decomposition;wavelet frames;wavelet function;time-frequency domain analysis

0 引言

时频域分析方法 (TF) 对于处理非平稳的时间序列信号有十分重要的作用，小波分析是重要的时频域分析方法 [3][6]。自 Morlet 提出小波分析的概念以来，科学家提出了许多不同的函数作为小波母函数 [7][10][8]。一般将小波母函数称为小波函数。

时频域分析方法都是将一维的时间信号映射到二维的时频平面，从而得到全面反映被观测信号的时间 - 频率联合特征 [1]。具体到小波变换则是用尺度因子和位移因子来刻画时间信号的时间 - 频率联合特征 [12]，将原本的一维时间信号“升维”到二维的“尺度—位移”平面来研究。“升维”肯定会带来一定的“冗余”[12][11]。事实上，离散小波就是消除了部分冗余”后的产物。离散小波建立了一维连续时间信号与二维“尺度—位移”平面中离散点集之间的对应关系 [13]。离散小波还可以看作是派生于小波母函数的函数集，这样的函数集被当做小波基使用 [14][12]。多尺度分析框架也是基于这样的基础建立的，在多尺度分析样的框架下小波空间与尺度空间的直和是另一个的层次的尺度空间 [15]。信号可分解为细节部分 W 和大尺度逼近部分 V，对于大尺度逼近部分可以再分解。如此重复，就可以得到任意尺度（或分辨率）上的细节部分和逼近部分。小波函数可以通过对两个不同尺度函数求差而得到的，小波反映了相邻尺度之间的微小变化，也就是信号的细节部分 [8][13]。一个尺度函数经过一个低通滤波器可得到另一个相邻尺度函数，而经过高通滤波器可得到了相应的小波函数。此低通滤波器和高通滤波器构成了一个对组，这就是双尺度差分方程所阐述的原理 [16]。在建立了上述高通滤波器的系数和低通滤波器的系数之间的对应关系后，尺度函数和小波函数的对应关系也就确定了。

B 样条曲线具有在一定程度上保持几何形状的特性，因此 B 样条曲线适合当做某种尺度函数，基于 B 样条尺度函数可以生成相应的 B 样条小波函数 [2][16]。近年来出现了另外一种时频域信号分析方法——模态分解法，包括经验模态分解 EMD、变分模态分解 VMD 和正交模态分解 OMD. [3] [4] [5]。所谓模态本质上是窄带函数。按照模态的定义可以将其分成两类，一类是具有周期属性的窄带函数，另一类是不具有周期属性的窄带函数。其中不具有周期属性的窄带函数模态在时域里具有局部的支撑集，所以其具有小波函数的属性 [5]。从这个意义上说，模态分解方法和小波分析方法之间是存在深刻的内在联系的 [17]。

上面实际讨论了现有的生成小波函数（母函数）的方法，包括经典的小波函数，也包括了基于多尺度分析框架生成的小波函数。现有的经典小波函数的数量是有限的。而基于多尺度分析框架生成的小波函数，如 B 样条小波函数，一般没有统一的解析表达式。小波函数都应当满足可容许条件 [18]，在一些应用场合还要求小波函数具有一定阶的消失矩，对正则性有一定的要求。正则性一般用来刻画函数的光滑程度 [9]。然而，寻找具有紧支撑且连续可微的小波函数是十分困难的，如果还要求正交性就更加困难了。为了满足正交性的要求，人们又提出了多小波 [19]。

本文采用了一种与以往完全不同的新方法来构造实数域上的小波函数，即基于有限长度实数列的插值函数来构造小波函数。这种构造方法简单且具有一般性。有限长度数列称为种子数列，相应的小波函数称为种子数列小波函数。种子数列小波函数是连续且可微的，且在时频域中是能量集中的。它在时频域中均有有限支撑集。我们证明了当且仅当种子数列具有零均值时，其插值函数满足小波函数的可允许条件，给出了种子数列小波函数的高阶消失矩所对应的条件。在此基础上本文还提出了随机小波函数的概念，构造出了具有任意阶消失矩的随机小波函数。

本文将以以下方式展开：首先通过对本文定理 1 的证明，给出了种子数列小波函数的构造方法。又通过定理 2 的证明，讨论了种子数列小波函数的高阶消失矩所对应的条件。在此基础上，我们重点讨论了随机小波函数，分析了随机小波函数的对称性，以及高阶消失矩所对应的

条件。

本文的所有算例，都有 python3.8 的程序，可以通过作者的邮箱获取。

1 生成小波函数

定理 1: 有限长度的时间实数列 $\boldsymbol{u}=[u(-l),u(-l+1),\ldots,u(0),\ldots,u(l-1),u(l)]$，$\boldsymbol{u}$ 的长度是 $2l+1$, 令 $n=2l+1$, 时间实数列 $\boldsymbol{u}$ 中元素的时间间隔是 Δ, 时间总长度是 $T=(n-1)\Delta$, 且 $\sum_{k=-l}^{l}u(k)=0$, 以时间序列 $\boldsymbol{u}$ 按照 (式 1) 构造其插值函数 $\Psi_u(t)$:

$$\Psi_u(t)=\sum_{k=-l}^{l}u(k)\frac{\sin\Omega_\Delta(t-k\Delta)}{\Omega_\Delta(t-k\Delta)} \tag{1}$$

其中 $t\in(-\infty,\infty)$, $\Omega_\Delta=\pi/\Delta$，则 $\Psi_u(t)$ 是实数域上的小波函数。我们将有限长度实数列 $\boldsymbol{u}$ 称为小波函数 $\Psi_u(t)$ 的种子数列。

证明:

1. 显然 $\Psi_u(t)\in L^2(R)$, 且有：

$$\Psi_u(k\Delta)=\begin{cases}u(k) & \text{if } k=-l,(-l+1),\ldots,0,\ldots,(l-1),l\\ 0 & \text{if } k>l \text{ or } k<-l.\end{cases}$$

因而可知 $\Psi_u(t)$ 的紧支撑区间是 $[-l\Delta,l\Delta]$，在支撑区间以外 $\Psi_u(t)$ 趋于零。$\Psi_u(t)$ 的能量集中于支撑区间。

2. 对 $\Psi_u(t)$ 做傅里叶变换：

$$\begin{aligned}F(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_u(t)e^{-j\omega t}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=-l}^{l}u(k)\frac{\sin\Omega_\Delta(t-k\Delta)}{\Omega_\Delta(t-k\Delta)}e^{-j\omega t}\,dt\\&=\sum_{k=-l}^{l}u(k)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\Omega_\Delta t'}{\Omega_\Delta t'}e^{-j\omega(t'+k\Delta)}\,dt'\\&=\sum_{k=-l}^{l}u(k)e^{-j\omega k\Delta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\Omega_\Delta t}{\Omega_\Delta t}e^{-j\omega t}\,dt=U_u(\omega)U_{\Omega_\Delta}(\omega)\end{aligned} \tag{2}$$

其中

$$U_{\Omega_\Delta}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\Omega_\Delta t}{\Omega_\Delta t}e^{-j\omega t}\,dt=\begin{cases}\Delta & |\omega|<=\Omega_\Delta\\ 0 & |\omega|>\Omega_\Delta\end{cases} \tag{3}$$

$$U_u(\omega)=\sum_{k=-l}^{l}u(k)e^{-j\omega k\Delta} \tag{4}$$

由 $\sum_{k=-l}^{l} u(k) = 0$, 可知，$U_u(0) = 0$,$F(0) = 0$, $\lim_{\omega\to 0} \frac{|F(\omega)|^2}{\omega} = 0$, 故瑕积分 $\int_0^\infty \frac{|F(\omega)|^2}{\omega} dt$ 收敛。即：

$$0 < C_\Psi = \int_0^\infty \frac{|F(\omega)|^2}{\omega} < \infty$$

函数 $\Psi_u(t)$ 满足允许性条件。

证毕。

算例 1: Haar 小波是一种简单且易于理解的小波函数，广泛应用于信号处理等领域，但由于其不连续性，其在实际应用中的效果受到了影响。其实对 Haar 小波以 $\frac{1}{2}$ 为采样周期采样后得到的数列，符合本文提出的小波函数的种子数列的要求。据此可以构造出新的连续的小波函数:

$$\Psi_u(t) = \frac{sin(2\pi(t-\frac{1}{4}))}{2\pi(t-\frac{1}{4})} - \frac{sin(2\pi(t-\frac{3}{4}))}{2\pi(t-\frac{3}{4})}$$

算例 1 中的小波函数 $\Psi_u(t)$ 如图 1所示,$\Psi_u(t)$ 的主值区间是 [0,1]，正峰值是 1，负峰值-1。事实上，算例 1 给出的是由种子数列 $\{1, -1\}$ 生成的小波函数。

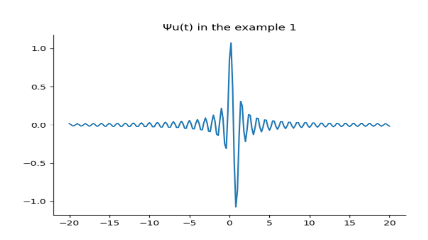


图 1: 算例 1 中的小波函数

2 种子数列小波函数的消失矩

小波函数 $\Psi_u(t)$，如果满足以下条件：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^m \Psi_u(t) dt = 0 \quad (m = 0, 1, \cdots, p-1)$$

则称 $\Psi_u(t)$ 具有 p 阶消失矩。

$\Psi_u(t)$ 具有 p 阶消失矩, 意味着小波函数 $\Psi_u(t)$ 与所有低于 p 阶的多项式都是正交的。参考文献 [5] 指出，信号的低频非震荡的模态是可以用多项式来拟合的，这就是说，具有 p 阶消失矩的小波函数 $\Psi_u(t)$ 有助于忽略原始信号中的低频模态，只关注高频模态，即细节部分。亦即消失矩高的小波函数具有更好的频域局部性。

定理 2: 有限长度的时间实数列 $\boldsymbol{u} = [u(-l), u(-l+1), \ldots, u(0), \ldots, u(l-1), u(l)]$，$\boldsymbol{u}$ 的长度是 $2l+1$, 令 $n = 2l+1$, 时间实数列 $\boldsymbol{u}$ 中元素的时间间隔是 Δ, 时间总长度是 $T = (n-1)\Delta$,

且 $\sum_{k=-l}^{l} u(k)=0$, 以时间序列 $\boldsymbol{u}$ 按照 (式 1) 构造小波函数 $\Psi_u(t)$。则 $\Psi_u(t)$ 具有 p 阶消失矩的充要条件是:

$$\sum_{k=-l}^{l} k^m u(k)=0 \quad (m=0,1,\cdots,p-1) \tag{5}$$

证明: 由 (式 2) 可知,生成小波函数 $\Psi_u(t)$ 的傅里叶变换 $F(\omega)$ 在频域上的开区间 $(-\Omega_\Delta,\Omega_\Delta)$ 中是连续且无穷次可微的。又由 (式 3) 和 (式 4) 可知，当 $\omega\in(-\Omega_\Delta,\Omega_\Delta)$ 时有:

$$F(\omega)=\Delta\sum_{k=-l}^{l} u(k)e^{-j\omega k\Delta} \tag{6}$$

根据采样定理，我们讨论的信号的带宽都位于区间 $(-\Omega_\Delta,\Omega_\Delta)$ 内。故可利用傅里叶变换的频域微分性质，若 $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_u(t)e^{-j\omega t}dt$, 则有:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^m\Psi_u(t)e^{-j\omega t}dt=j^m\frac{d^mF(\omega)}{d\omega^m} \quad (m=0,1,\cdots,p-1) \tag{7}$$

将等式 (6) 代入等式 (7) 可得:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^m\Psi_u(t)e^{-j\omega t}dt=\Delta^{m+1}\sum_{k=-l}^{l} k^m u(k)e^{-j\omega k\Delta} \quad (m=0,1,\cdots,p-1) \tag{8}$$

在等式 (8) 中，令 $\omega\to 0$, 可得:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^m\Psi_u(t)dt=\Delta^{m+1}\sum_{k=-l}^{l} k^m u(k) \quad (m=0,1,\cdots,p-1) \tag{9}$$

由此可知，$\int_{-\infty}^{+\infty} t^m\Psi_u(t)dt=0$ 与 $\sum_{k=-l}^{l} k^m u(k)=0$ 是等价的， $m=0,1,\cdots,p-1$。证毕。

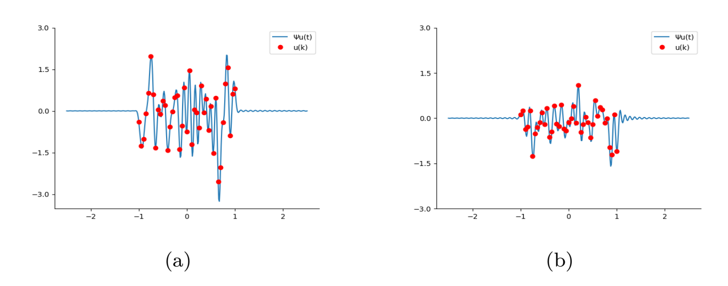
推论 1: 有限长度的时间实数列 $\boldsymbol{u}=[u(-l),u(-l+1),\ldots,u(0),\ldots,u(l-1),u(l)]$，$\boldsymbol{u}$ 的长度是 $2l+1$, 令 $n=2l+1$, 时间实数列 $\boldsymbol{u}$ 中元素的时间间隔是 Δ, 时间总长度是 $T=(n-1)\Delta$, 且 $\sum_{k=-l}^{l} u(k)=0$, 以时间序列 $\boldsymbol{u}$ 按照 (式 1) 构造小波函数 $\Psi_u(t)$。则 $\Psi_u(t)$ 具有 p 阶消失矩的充要条件是:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ (-l)^1 & (-l+1)^1 & \ldots & 0 & \ldots & (l-1)^1 & l^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-l)^{p-2} & (-l+1)^{p-2} & \ldots & 0 & \ldots & (l-1)^{p-2} & l^{p-2} \\ (-l)^{p-1} & (-l+1)^{p-1} & \ldots & 0 & \ldots & (l-1)^{p-1} & l^{p-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(-l) \\ u(-l+1) \\ \vdots \\ u(l-1) \\ u(l) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

推论 2: 有限长度的时间实数列 $\boldsymbol{u}=[u(-l),u(-l+1),\ldots,u(0),\ldots,u(l-1),u(l)]$，$\boldsymbol{u}$ 的长度是 $2l+1$, 令 $n=2l+1$, 时间实数列 $\boldsymbol{u}$ 中元素的时间间隔是 Δ, 时间总长度是 $T=(n-1)\Delta$, 且 $\sum_{k=-l}^{l} u(k)=0$, 以时间序列 $\boldsymbol{u}$ 按照式 (1) 构造小波函数 $\Psi_u(t)$。若 $\Psi_u(t)$ 具有 p 阶消失矩，则 $p<n$。

3 生成随机小波函数

对于均值为零的有限长度的随机数列，也可以当作种子数列，根据式 (1) 生成小波函数。我们称这样的小波函数为随机小波函数。



(a) (b)

图 2: 算例 2 给出了随机种子数列和随机小波函数

算例 2 给出的实数域上的函数，是由均值为 0 的随机种子数列生成的，符合小波函数的条件，研究表明，随机小波函数在随机信号分析中有重要的作用。

4 如何使随机生成的小波函数具有对称性？

随机种子数列一般是不具有对称性的，但可以按照参考文献 [5] 给出的方法，对随机生成的种子数列数进行奇偶分解，从而分别得到奇小波函数和偶小波函数，奇、偶小波函数分别具有反对称性和对称性。

对种子数列 $\boldsymbol{u}=[u(-l),u(-l+1),\ldots,u(0),\ldots,u(l-1),u(l)],\boldsymbol{u}$，令 $\boldsymbol{u_{inv}}$ 为 $\boldsymbol{u}$ 的倒序排列, 即 $\boldsymbol{u_{inv}}=[u(l),u(l-1),\ldots,u(0),\ldots,u(-l+1),u(-l)]$。令:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u_e}&=0.5(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u_{inv}})\\ \boldsymbol{u_o}&=0.5(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u_{inv}})\\ \boldsymbol{u}&=\boldsymbol{u_e}+\boldsymbol{u_o}\end{aligned}\tag{11}$$

称这样的分解是对种子数列的 $\boldsymbol{u}$ 的奇偶分解，$\boldsymbol{u_e}$ 是偶子数列，$\boldsymbol{u_o}$ 是奇子数列分量，且有:

$$\begin{cases}u_e(-k)=u_e(k)\\ u_o(-k)=-u_o(k)\end{cases}\qquad k=1,2,...,l,\text{ 且}\qquad \begin{cases}u_e(0)=u(0)\\ u_o(0)=0\end{cases}$$

算例 3: 在算例 3 中，小波函数的种子数列 $\boldsymbol{u}$ 是有限长度的随机数列，长度为 41，其均值是 0，方差是 1。种子数列 $\boldsymbol{u}$ 被当做采样信号，其时域分布区间是 [-1,1], 采样周期 $\Delta=0.05s$, 采样信号的频带上限 $\Omega_\Delta=20\pi$，由随机种子数列生成的小波函数是定义在整个实数域上的函数。按照式 (11) 将种子数列 $\boldsymbol{u}$ 分解成奇数列 $\boldsymbol{u_e}$ 和偶数列 $\boldsymbol{u_o}$。图 3给出了以种子数列 $\boldsymbol{u}$ 生成的小波函数 $\Psi_u(t)$、以偶子数列 $\boldsymbol{u_e}$ 生成的偶小波函数 $\Psi_e(t)$ 和以奇子数列 $\boldsymbol{u_o}$ 生成的奇小波函数 $\Psi_o(t)$。偶小波函数具有对称性，奇小波函数具有反对称性。

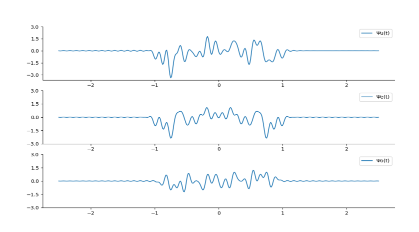


图 3: 算例 3 中的奇偶小波函数

5 随机小波函数的消失矩

只要生成随机小波函数的随机数列有足够的长度，随机小波函数也可以具有指定阶的消失矩。可以按照如下步骤组成小波函数的种子数列：

1. 若要求的种子数列的长度是 n, 构建具有 p 阶消失矩的随机小波函数，则应生成长度为 $l_R(l_R = [\frac{n-p}{2}])$ 的随机数列 $\boldsymbol{u}_R = [u_R(0), u_R(1), \ldots, u(l_R-1)]$。

2. 以线性方程组 (12) 的系数矩阵中间的 p 列组成方阵 C_{of}，即：

$$C_{of} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ (-l+l_R)^1 & (-l+l_R+1)^1 & \ldots & 0 & \ldots & (l-l_R-1)^1 & (l-l_R)^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-l+l_R)^{p-2} & (-l+l_R+1)^{p-2} & \ldots & 0 & \ldots & (l-l_R-1)^{p-2} & (l-l_R)^{p-2} \\ (-l+l_R)^{p-1} & (-l+l_R+1)^{p-1} & \ldots & 0 & \ldots & (l-l_R-1)^{p-1} & (l-l_R)^{p-1} \end{bmatrix} \tag{12}$$

3. 以矩阵 C_{of} 为系数矩阵，C 为常数项向量，建立线性方程组：

$$C_{cf}\boldsymbol{x}^T = C^T \tag{13}$$

线性方程组 (13) 中 $\boldsymbol{x} = [x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}]$ 是未知数向量，$C = [c_0, c_1, \ldots, c_{p-1}]$ 为常数项向量, 有：

$$c_i = \begin{cases} -2\sum_{j=0}^{l_R-1}(-l+j)^i u_R(j) & \text{if } i = 0, 2, \ldots, p-1 \\ 0 & \text{if } i = 1, 3, \ldots p-2. \end{cases}$$

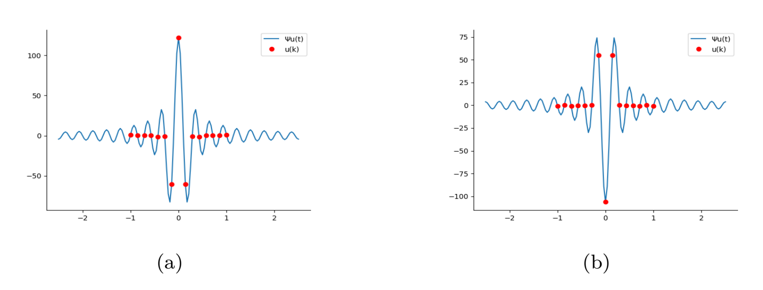
4. 求解线性方程组 (13)，得到解向量 $\boldsymbol{x} = [x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}]$。容易证明 $\boldsymbol{x}$ 是对称的，即：

$$x_i = x_{p-i-1} \qquad i = 0, 1, \ldots, [\frac{p-1}{2}]$$

5. 将随机数列 $\boldsymbol{u_R}$ 逆序排列，得到逆序的随机数列 $\boldsymbol{u}_{RR} = [u_R(l_R-1), u_R(l_R-2), \ldots, u(0)]$。

6. 将 $\boldsymbol{u}_R$、$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{u}_{RR}$ 连接起来，组成数列 $[\boldsymbol{u}_R, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_{RR}]$，以其为种子数列，生成对称的随机小波函数 $\Psi_u(t)$。

算例 4: 种子数列的长度是 15，要求随机小波函数具有 3 阶消失矩。这样需要生成的随机数列的长度是 6。种子数列 $\boldsymbol{u}$ 被当做采样信号，其时域分布区间是 [-1,1], 采样周期 $\Delta = 0.05s$, 采样信号的频带上限 $\Omega_\Delta = 20\pi$。图 4(a) 和图 4(b) 给出了两个实例。在这两个实例中，随机生成的数列的均值都是 0，方差都是 1。在图中用红色的圆点标注了小波函数的种子数列 $\boldsymbol{u}$，其中左右两侧的各 6 个点分别是随机数列 $\boldsymbol{u}_R$ 及其逆序排列 $\boldsymbol{u}_{RR}$, 中间的 3 个圆点是通过求解线性方程组 (13) 而得到的解数列 $\boldsymbol{x}$。图 4(a) 和图 4(b) 具有显著区别。这是因为数列 $\boldsymbol{u}_R$ 的随机性导致了解数列 $\boldsymbol{x}$ 的随机性，从而导致了两图的显著区别。但这两图都给出了具有 3 阶消失矩的小波函数。



(a) (b)

图 4: 算例 2 给出了随机种子数列和随机生成小波函数

6 结论和展望

小波是快速衰减且具有震荡形态的短波形。通过对该波形的缩放和平移来匹配输入的信号。显然本文基于有限长度的实数列构造的插值函数符合小波函数的形态。我们将这样的生成小波的有限长度实数列称为种子数列，相应的小波函数称为种子数列小波函数。种子数列小波函数是连续且可微的，并且在时频域中都是能量集中的，即在时频域中均有有限长度的支撑集。种子数列决定相应的小波函数的性质，种子数列具有零均值与小波函数满足“可允许条件”是等价的。小波函数的高阶消失矩也与种子数列的相应性质相关联。基于均值为零的随机数列可以生成随机小波函数，只要随机数列有足够的长度，也可以使得随机小波函数满足相应的正则性的要求。进一步的研究表明，随机小波函数具有重要的意义，有可能成为研究随机过程的工具。

参考文献（References）

[1] X.L.Fan, A. G.Chen,“Time-frequency analysis of matching tracking based on Morlet wavelet scaling parameter optimization” in *Journal of Sun Yat-sen University (Natural Sciences)*, 2000.

[2] X.Z.Yang, B.Yu “The vanishing moment of Hilbert transform of the third-order B-spline wavelet” in *Journal of Southwest Normal University (Natural Science Edition)*, Vol 46, No 12, 2021

[3] N.E.Huang,Z.Shen,S.R.Long, and M.C.Wu, "The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis" in *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: mathematical, physical and engineering sciences. Vol 454, No 1971*,1998, pp. 903–995.

[4] K.Dragomiretskiy, D.Zosso "Variational mode decompositio" in *IEEE transactions on signal processing. Vol 62, No 3*,2013, pp. 531–544.

[5] Ning Li, Lezhi Li."Orthogonal Mode Decomposition for Finite Discrete Signals" TechRxiv. September 24, 2024. DOI: 10.36227/techrxiv.172719873.30870948/v1

[6] Z.Y.Chen "Wavelet Analysis," *Science Press* Beijing,China,2007

[7] R.Kronland-Martinet,J.Morlet,and A.Grossmann, "Analysis of sound patterns through wavelet transform" in*International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence Vol 1,No 2* ,1987.pp273-302

[8] I.Daubechies, "Ten Lectures on Wavelets" in *CBM-SNSF Series in Applied Math61*, SIAM,Philadelphia,USA, 1992

[9] Y.Hou "Regularity of compactly supported symmetric quasi-orthogonal wavelets" *Journal of China Jiliang University* ,2010

[10] Z.B.Ji,S.G.Yan "Improved Morlet Wavelet" *Computer Engineering and Applications Vol 52,No 14*,2016

[11] P.Flandrin "Time-Frequency/Time-Scale Analysis" *Academic Press Inc*,1999

[12] I.Daubechies "Orthonormal basis of compactly supported wavelet" in *Comm Pure and Appl Math*,Vol 41,NO 7,1988, pp909–996

[13] S.Mallat "A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation" in *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*,1989

[14] J.A.Lian "Orthogonality criteria for multi-scaling functions"in *Appl Comput Hamon Anal*,Vol 5,No 3, 2002,pp277–311

[15] S.G.MALLAT "Multiresolution Approximations and Wavelet Orthogonal Bases of $L^2(R)$"in *Transactions of the american mathematical society*,Vol 315,No 1, 1989

[16] A.Akansu, R.Haddad "Multiresolution Signal Decomposition: Transforms,Subbands and Wavelets" *Academic Press*,2001

[17] I.Daubechies,J.F.Lu and H.T.Wu,"Synchrosqueezed wavelet transforms: An empirical mode decomposition-like tool"in *Applied and computational harmonic analysis*,Vol 30,No 2, 2011, pp243–261

[18] Y.H.Xie,Y.L,"Study on the admissible conditions of wavelet function"in *Journal of Shenyang Institute of Chemical Technology*,2005

[19] J.S.Leng, et al. "Construction of Biorthgonal Multiwavelets"in *Journal of Electronic Science and Technology of China*,Vol 2, No 1, 2004

[20] A.Akansu and R.Haddad "Multiresolution Signal Decomposition: Transforms,Subbands and Wavelets," *Academic Press*,2000,

[21] Ning Li, Lezhi Li. "A Method for Constructing Wavelet Functions on the Real Number Field " arXiv:2410.21697. https://doi.org/10.48550/arXiv.2410.21697